ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHÙNG THỊ KIM OANH

CÁC LỚP CEGRELL CỦA HÀM m - ĐIỀU HOÀ DƯỚI VÀ PHƯƠNG TRÌNH HESSIAN TRONG CÁC LỚP CEGRELL

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: PGS.TS. PHẠM HIẾN BẰNG

THÁI NGUYÊN - 2016

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả

Phùng Thị Kim Oanh

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng đào tạo, bộ phận sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 04 năm 2016

Tác giả

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một miền bị chặn và m là số nguyên sao cho $1 \le m \le n$. Xét phương trình m - Hesian phức có dạng

$$(dd^c\varphi)^m \wedge \beta^{m-n} = \mu \qquad (1.1)$$

trong đó $\beta = dd^c|z|^2$ là dạng Kähler chuẩn trong C^n và μ là độ đo Radon dương.

Phương trình m - Hessian phức được nghiên cứu lần đầu tiên bởi S.Y. Li năm 2004. Ông đã sử dụng phương pháp liên tục để giải bài toán Dirichlet không suy biến cho phương trình (1.1) trong các miền m - giả lồi mạnh. Một trong những vấn đề suy biến tương tự được nghiên cứu bởi Blocki năm 2005. Ông đã giải phương trình thuần nhất với điều kiện biên liên tục và trình bày những bước đầu tiên của lý thuyết thế vị đối với phương trình này. Gần đây, Abdullaev và Sadullaev đã quan tâm đến các tập m - cực và m - dung lượng của các hàm m - điều hòa dưới. Khi μ trù mật trong $L^p(\omega)(p > n/m)$, Dinew và Kolodziej đã chứng minh rằng với điều kiện biên liên tục đã cho, bài toán Dirichlet của phương trình (1.1) có một nghiệm liên tục duy nhất. Theo hướng nghiên cứu này chúng tôi chọn đề tài: " *Các lớp Cegrell của hàm m - điều hoà dưới và Phương trình Hessian trong các lớp Cegrell*".

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận văn là nghiên cứu các lớp năng lượng hữu hạn của hàm m - điều hòa dưới là tổng quát hóa các lớp Cegrell đối với hàm đa điều hòa dưới. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình Hessian phức suy biến $(dd^c\varphi)^m \wedge \beta^{n-m} = \mu$, trong đó μ là độ đo Radon dương suy biến.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

+ Nghiên cứu một số tính chất của hàm điều hoà dưới, hàm m - điều hoà dưới và toán tử Hessian, m - dung lượng tương đối và hàm m - cực trị tương đối.

+ Nghiên cứu và trình bày các kết quả gần đây của L.H. Chinh về một số tính chất của các lớp năng lượng U.Cegrell của hàm m - điều hoà dưới và sự tồn tại nghiệm của phương trình Hessian trong các lớp kiểu Cegrell.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phương pháp của lý thuyết đa thế vị phức.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 49 trang, trong đó có phần mở đầu, ba chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm điều hoà dưới, hàm m - điều hoà dưới và toán tử Hessian, m - dung lượng tương đối và hàm m - cực trị tương đối.

Chương 2: Trình bày một số kết quả về các lớp Cegrell của hàm m - điều hoà dưới.

Chương 3: Trình bày các kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình Hessian trong các lớp Cegrell.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1
HÀM ĐIỀU HÒA DƯỚI VÀ m - ĐIỀU HÒA DƯỚI

1.1. Hàm điều hòa dưới

Định nghĩa 1.1.1. *Giả sử* Ω *là tập mở trong* $\mathbb{C}$. *Hàm* $u:\Omega\to[-\infty,+\infty)$ *gọi là điều hòa dưới trên* Ω *nếu nó nửa liên tục trên trên* Ω *và thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình trên* Ω, *nghĩa là với mọi* $w\in\Omega$ *tồn tại* $\delta>0$ *sao cho với mọi* $0\le r\le\delta$ *ta có*

$$u(w)\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(w+re^{it})dt.$$

Kí hiệu tập hợp các hàm điều hòa dưới trên Ω là $SH(\Omega)$.

Mệnh đề 1.1.2. *Giả sử* Ω *là tập mở trong* $\mathbb{C}$, $u,v\in SH(\Omega)$. *Khi đó:*

(i) $\max(u,v)$ *là hàm điều hòa dưới trên* Ω.

(ii) *Tập các hàm điều hòa dưới trên* Ω *là một nón lồi, nghĩa là nếu* $u,v\in SH(\Omega)$ *và* $\alpha,\beta>0$ *thì* $\alpha u+\beta v$ *cũng thuộc* $SH(\Omega)$.

Định lý 1.1.3 *Giả sử* Ω *là miền bị chặn trong* $\mathbb{C}$, $u\in SH(\Omega)$. *Khi đó:*

(i) *Nếu* u *đạt cực đại toàn thể tại một điểm trên* Ω *thì* u *là hằng số trên* Ω.

(ii) *Nếu* $\limsup\limits_{z\to V}u(z)\le 0\ \forall V\in\partial\Omega$ *thì* $u\le 0$ *trên* Ω.

Định lý 1.1.4. *Giả sử* Ω *là tập mở trong* $\mathbb{C}$ *và* u *là hàm nửa liên tục trên trên* Ω. *Khi đó các mệnh đề sau là tương đương.*

(i) u *là hàm điều hòa dưới trên* Ω.

(ii) *Với mọi* $w\in\Omega$, *tồn tại* $\delta>0$ *sao cho* $\bar{\Delta}(w,\delta>0)\subset\Omega$ *và với mọi* $0\le r<\delta,\ 0\le t<2\pi$ *ta có*

$$u(w+re^{it})\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta^2-r^2}{\delta^2-2\delta r\cos(\theta-t)+r^2}u(w+\delta e^{i\theta})d\theta.$$

ở đó $\bar{\Delta}(w,\delta>0)=\{z\in\Omega:|z-w|\le\delta\}$ *là đĩa đóng tâm* w *bán kính* δ.

(iii) *Với mọi miền D compact tương đối trong* Ω *và h là hàm điều hòa trên trên D, liên tục trên* $\overline{D}$ *thỏa mãn*

$$\limsup_{z \to V}(u - h)(z) \le 0 \quad (V \in \partial D)$$

ta có $u \le h$ *trên D.*

Định lý 1.1.5. *Giả sử* $\{u_n\}$ *là dãy giảm các hàm điều hòa dưới trên tập mở* Ω *trên* $\mathbb{C}$ *và* $u = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$. *Khi đó* u *là hàm điều hòa dưới trên* Ω.

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng minh u nửa liên tục trên trên Ω. Với mỗi $a \in$ R, tập

$$\{z \in \Omega : u(z) < a\} = \bigcup_{n}^{\infty} \{z \in \Omega : u_n(z) < e\}.$$

Do đó nó là tập mở. Vậy u nửa liên tục trên trên Ω. Do mỗi u_n thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình nên dùng định lý hội tụ đơn điệu suy ra u cũng thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình trên Ω. Do đó u là hàm điều hòa dưới trên Ω. □

Hệ quả 1.1.6. *Giả sử* u *là hàm điều hòa dưới trên miền* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *sao cho* u *không đồng nhất* $-\infty$ *trên* Ω. *Khi đó tập*

$$E = \{z \in \Omega,\ u(z) = -\infty\}$$

có độ đo Lebesgue bằng 0.

Tập $E \subset \mathbb{C}$ mà trên đó có hàm điều hòa dưới, không đồng nhất $-\infty$, nhận giá trị bằng $-\infty$ trên đó gọi là các tập cực. Sau này trong trường hợp $\mathbb{C}^n$, tập như vậy gọi là tập đa cực. Đó là các tập kỳ dị đối với lớp hàm điều hòa dưới(tương ứng đa điều hòa dưới).

1.2. Hàm đối xứng sơ cấp

Cho S_k, $k = 1, \ldots, n$ là một hàm k- đối xứng sơ cấp với $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n$, $\quad S_k(\lambda) = \sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_k}$. Đặt $S_0(\lambda) = 1$ và $S_k(\lambda) = 0$ nếu $k > n$ hoặc $k < 0$. Ta có đồng nhất thức

$$(\lambda_1 + t)\dots(\lambda_n + t) = \sum_{k=0}^{n} S_k(\lambda)t^{n-k}, t \in \mathbb{R}.$$

Kí hiệu Γ_k là bao đóng của các thành phần liên thông của tập hợp $\{S_k(\lambda) > 0\}$ chứa $(1,\dots,1)$. Ta có

$$\Gamma_k = \left\{\lambda \in R^n / S_k\left(\lambda_1 + t,\dots,\lambda_n + t\right) \geq 0, \forall t > 0\right\}.$$

Từ $S_m\left(\lambda_1 + t,\dots,\lambda_n + t\right) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{m-k} S_k\left(\lambda\right)t^{m-k}, t \in \mathbb{R}$ suy ra

$$\Gamma_k := \{\lambda \in \mathrm{R}^n / S_j(\lambda) \geq 0, \forall 1 \leq j \leq k\}.$$

Ký hiệu $\mathcal{H}$ là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ gồm các ma trận Hermitian phức cấp $n \times n$. Với $A \in \mathcal{H}$, ký hiệu $\lambda(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ là các giá trị riêng của A. Đặt $\tilde{S}_k(A) = S_k(\lambda(A))$. Từ đẳngthức

$$\det\left(A + tI\right) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{S}_k\left(A\right)t^{n-k}, t \in \mathbb{R}$$

suy ra hàm $\tilde{S}_k$ là tổng của tất cả các định thức con chính bậc k, $\tilde{S}_k(A) = \sum_{|I|=k} A_{II}$. Do đó, $\tilde{S}_k$ là một đa thức thuần nhất bậc k trên $\mathcal{H}$ mà nó là hyperbolic đối với ma trận đồng nhất I. Như trong [3], ta địnhnghĩa $\tilde{\Gamma}_k = \{A \in \mathcal{H} / \tilde{S}_k(A + tI) \geq 0, \forall t \geq 0\}$. Ta có $\tilde{\Gamma}_k = \{A \in \mathcal{H} / \lambda(A) \in \Gamma_k\}$ là nón lồi và hàm $\tilde{S}_k^{1/k}$ lõm trên $\tilde{\Gamma}_k$.

1.3. Hàm m-điều hòa dưới và toán tử Hessian

Ký hiệu β là dạng Kahler chuẩn trong C^n và Ω là một miền m- siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, tức là tồn tại một hàm m- điều hòa dưới liên tục $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^-$ sao cho $\{\varphi < c\} \Subset \Omega$ với mỗi $c < 0$.

Ta kết hợp $(1,1)$- dạng thực α trong $\mathbb{C}^n$ với các ma trận Hermitian $[a_{j\bar{k}}]$ bởi $\alpha = \dfrac{i}{\pi}\sum_{j,k} a_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k$. Khi đó dạng Kähler chính tắc β được kết hợp với ma trận đồng nhất I. Ta có $\binom{n}{k}\alpha^k \wedge \beta^{n-k} = \tilde{S}_k(A)\beta^n$.

Định nghĩa 1.3.1. Cho α là $(1,1)$- dạng thực trên Ω. Ta nói rằng α là m- dương tại một điểm cho trước $P \in \Omega$ nếu tại điểm này ta có:

$$\alpha^j \wedge \beta^{n-j} \geq 0, \ \forall j = 1,\dots,k.$$

α gọi là k- dương nếu nó là k- dương tại mọi điểm thuộc Ω.

Cho T là một dòng song bậc $(n-k, n-k)(k \leq m)$. Khi đó T được gọi là m- dương nếu $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \wedge T \geq 0$, với mọi $(1,1)$- dạng m- dương α_1, ..., α_k.

Định nghĩa 1.3.2. Hàm $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ được gọi là m- điều hòa dưới nếu nó là hàm điều hòa dưới và $dd^c u \wedge \alpha_1 \dots \wedge \alpha_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \geq 0$, với mỗi $(1,1)$- dạng m- dương $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$.

Lớp tất cả hàm m- điều hòa dưới trên Ω được ký hiệu là $SH_m(\Omega)$.

Mệnh đề 1.3.3 [3] *i) Nếu u là C^2 trơn thì u là m- điều hòa dưới khi và chỉ khi $dd^c u$ là m- dương tại mọi điểm thuộc Ω.*

ii) Nếu $u, v \in SH_m(\Omega)$ thì $\lambda u + \mu v \in SH_m(\Omega), \forall \lambda, \mu > 0$

iii) Nếu u là m- điều hòa dưới trong Ω thì $u * \chi_0$ cũng là m- điều hòa dưới trong $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega / d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

iv) Nếu $(u_l) \subset SH_m(\Omega)$ bị chặn đều địa phương thì $(\sup u_l)^* \in SH_m(\Omega)$ trong đó v^* là chính qui nửa liên tục trên của v.

v) $PSH = \mathcal{P}_n \subset \dots \subset \mathcal{P}_1 = SH$.